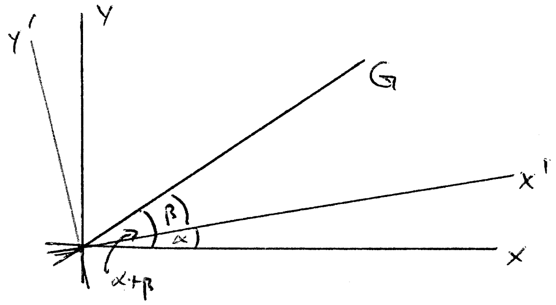
Theorie für Lehramt, Präsenzübung 1

P 01

a)



$m_1 = \tan\alpha$

$m_2 = \tan\beta$

$m_{tot} = \tan(\alpha+\beta)$

(z.B. 100% Steigung $\hat{=}$ 45°, $m=1$)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

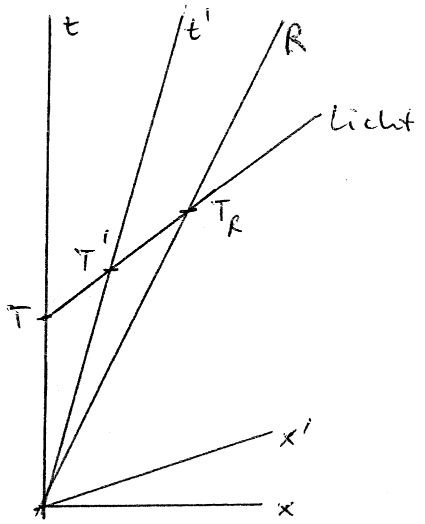
$$\overset{(\div\cos\alpha\cos\beta)}{=} \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\leadsto m_{tot} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$$

(z.B. 100% auf 100% $\hat{=}$ 45° + 45° = 90°

$m_{tot} = \frac{1+1}{1-1\cdot 1} = \infty$ ✓)

b)



$T' = k_1 T$ & $T_R = k_2 \cdot T'$

$\leadsto T_R = k_1 k_2 \cdot T \overset{!}{=} k_{tot} \cdot T$

$\leadsto k_{tot} = k_1 k_2$

$k = e^{\theta} \leadsto \theta_{tot} = \theta_1 + \theta_2$ (Licht: $v = 1 \Leftrightarrow k = \infty$)

$v = \tanh\theta \leadsto v_{tot} = \tanh(\theta_1 + \theta_2)$

$$\tanh(a+b) = \frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)} = \frac{\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b}{\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b}$$

$$\overset{(\div\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b)}{=} \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$$

$$\leadsto v_{tot} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

alternativ mit k-Faktoren: $v = \frac{k - k^{-1}}{k + k^{-1}}$

$$v_{tot} = \frac{k_1k_2 - (k_1k_2)^{-1}}{k_1k_2 + (k_1k_2)^{-1}} = \frac{(k_1-k_1^{-1})(k_2+k_2^{-1}) + (k_2-k_2^{-1})(k_1+k_1^{-1})}{(k_1+k_1^{-1})(k_2+k_2^{-1}) + (k_2-k_2^{-1})(k_1-k_1^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{k_1-k_1^{-1}}{k_1+k_1^{-1}} + \frac{k_2-k_2^{-1}}{k_2+k_2^{-1}}}{1 + \frac{k_1-k_1^{-1}}{k_1+k_1^{-1}} \cdot \frac{k_2-k_2^{-1}}{k_2+k_2^{-1}}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} \checkmark$$

Falls Zeit bleibt:

Diskutieren Sie die Längenkontraktion anhand von Raumzeit-Diagrammen!

$\boxed{\text{P 02}}$

$c=1$

$$s = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \overset{\text{zeitartig}}{u} = \frac{ds}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\theta \\ \mathrm{sh}\,\theta \end{pmatrix}, \quad \overset{\text{raumartig}}{b} = \frac{d}{d\tau} u = \frac{d\theta}{d\tau} \begin{pmatrix} \mathrm{sh}\,\theta \\ \mathrm{ch}\,\theta \end{pmatrix}$$

alle sind Funktionen der Eigenzeit τ, $\quad u \cdot u = 1$, $\quad b \cdot u = 0$.

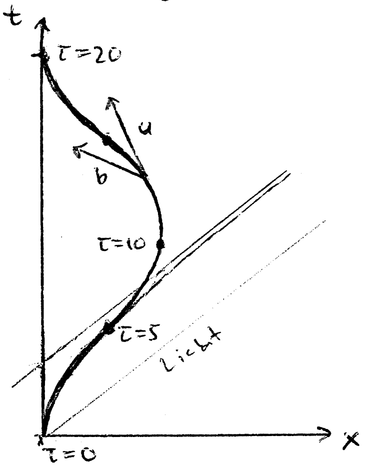
konstante Beschleunigung: $\quad b^2 = \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 (\mathrm{sh}^2\theta - \mathrm{ch}^2\theta) = -\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \overset{!}{=} -g$

$$\rightsquigarrow \frac{d\theta}{d\tau} = g \xrightarrow[\theta(0)=0]{} \theta(\tau) = g\tau \rightsquigarrow u(\tau) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, g\tau \\ \mathrm{sh}\, g\tau \end{pmatrix} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} t(\tau) \\ x(\tau) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = \mathrm{ch}\, g\tau \\ \frac{dx}{d\tau} = \mathrm{sh}\, g\tau \end{cases} \xrightarrow[x(0)=0]{t(0)=0} \begin{cases} t(\tau) = \frac{1}{g}\,\mathrm{sh}\, g\tau \\ x(\tau) = \frac{1}{g}(\mathrm{ch}\, g\tau - 1) \end{cases} \overset{\mathrm{ch} = \sqrt{\mathrm{sh}^2+1}}{=} \frac{1}{g}\left(\sqrt{g^2t^2+1} - 1\right)$$

Grenzfälle: $\quad t \to 0: \ \tau \to 0, \ x(t) \approx \frac{1}{g}\left(1 + \frac{1}{2}(gt)^2 - 1\right) = \frac{1}{2} g t^2, \ v(t) \approx gt$ ✓

$\qquad t \to \infty: \ \tau \to \infty, \ x(t) \longrightarrow \frac{1}{g}\left(\sqrt{g^2t^2} - 1\right) = t - \frac{1}{g}, \ v(t) \to 1$ ✓



u zeitartig
b raumartig
u tangential
$b \perp u$

Zahlenwerte:

zufällig ist $g \cdot (1 \text{ Jahr}) \approx 1$.

Also: $\quad t(5 \text{ Jahre}) \approx 1 \text{ Jahr} \cdot \mathrm{sh}(5) \approx 74 \text{ Jahre}$

$\qquad x(5 \text{ Jahre}) \approx 1 \text{ Jahr} \cdot (\mathrm{ch}(5) - 1) \approx 73 \text{ Jahre}$ (Lichtjahre)

mal vier:

Erdkalender sagt $2010 + 4 \cdot 74 = 2306$.

Reichweite ist $2 \times 73 = 146$ Lichtjahre